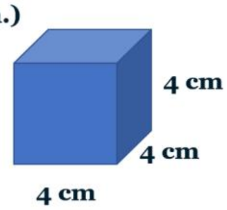
Tägliche Übung

ÜH

1. Berechne den Volumen und Oberflächeninhalt folgender Körper!

a.)



Körper → Würfel

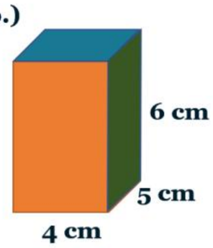
$V = a \cdot a \cdot a = a^3$

$V = 4cm \cdot 4cm \cdot 4cm$
$\underline{\underline{= 64cm^3}}$

$A_O = 6 \cdot a^2$

$A_O = 6 \cdot (4cm)^2$
$\underline{\underline{= 96cm^2}}$

b.)



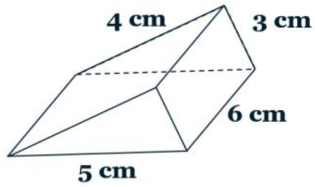
Körper → Quader

$V = a \cdot b \cdot c$

$V = 4cm \cdot 5cm \cdot 6cm$
$\underline{\underline{= 120cm^3}}$

$A_O = 2 \cdot (ab + ac + bc)$
$A_O = 2 \cdot (20cm^2 + 24cm^2 + 30cm^2)$
$= 2 \cdot 74cm^2$
$\underline{\underline{= 148cm^2}}$

c.)

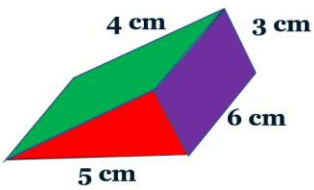


Körper → dreiseitiges Prisma mit rechtwinkligem Dreieck als Grundfläche

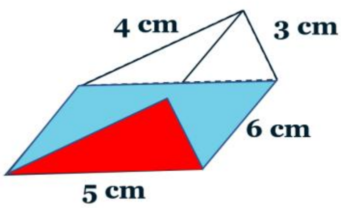
Tägliche Übung

ÜH

c.)



c.)



$A_G = \frac{g \cdot h_g}{2}$ $\quad A_G = \frac{4cm \cdot 3cm}{2} = 6cm^2$

$V = A_G \cdot h$

$V = 6cm^2 \cdot 6cm$
$\underline{\underline{= 36cm^3}}$

$A_O = 2 \cdot A_G + A_M$

$A_O = 2 \cdot 6cm^2 + 5cm \cdot 6cm + 4cm \cdot 6cm + 3cm \cdot 6cm$
$\underline{\underline{= 84cm^2}}$

Volumen und Oberflächeninhalt von Pyramiden

- Zeichnung von Pyramiden im Zweitafelbild und im Schrägbild
- Seitenhöhen mit Pythagoras bestimmen

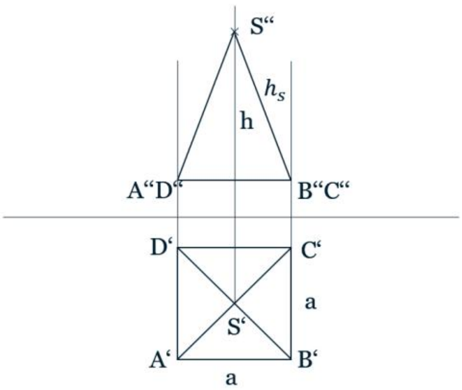
Zweitafelbild und Schrägbild einer Pyramide

MH

Gegeben:
- Pyramide mit quadratischer Grundfläche
- a = 4 cm
- h = 4 cm

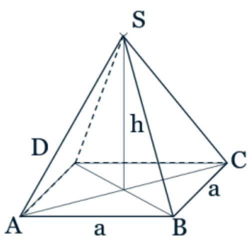
Zweitafelbild

MH



Schrägbild

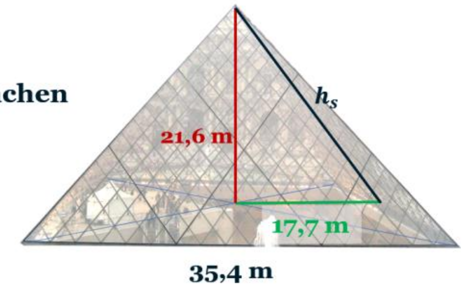
MH



MH

Oberflächeninhalt einer Pyramide

4 Dreiecksflächen



$$h_s{}^2 = (21,6)^2 + (17,7)^2$$

$$h_s{}^2 = 466,56 + 313,29 = 779,85 \quad / \sqrt{}$$

$$h_s = 27{,}926 \text{ m}$$

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{35,4 \cdot 27,926}{2}$$

$$A = 494,287 m^2 \quad / \cdot 4$$

$$\underline{\underline{A_M = 1977,15 m^2}}$$

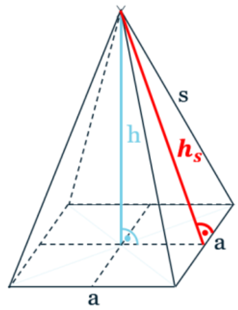
MH

Oberflächeninhalt berechnen

Für den **Oberflächeninhalt A_O** einer Pyramide mit dem **Grundflächeninhalt A_G** und dem **Mantelflächeninhalt A_M** gilt:

$A_O = A_G + A_M$

Übung und Festigung



gegeben:

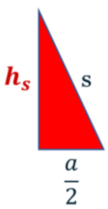
quadratische Pyramide a = 15 cm, Seitenkante s = 20 cm

gesucht:

h_s und h in cm, A_O in cm²

Lösung:

h_s berechnen → $h_s^2 + (\frac{a}{2})^2 = s^2$



$h_s^2 = s^2 - (\frac{a}{2})^2$

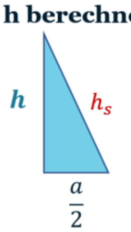
$h_s^2 = (20\ cm)^2 - (\frac{15cm}{2})^2$

$h_s^2 = 400\ cm^2 - 56{,}25\ cm^2$

$h_s^2 = 343{,}75\ cm^2$ /√

$\underline{\underline{h_s = 18{,}5\ cm}}$

h berechnen → $h^2 + (\frac{a}{2})^2 = h_s^2$



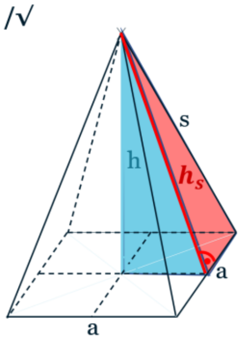
$h^2 = h_s^2 - (\frac{a}{2})^2$

$h^2 = (18{,}5\ cm)^2 - (\frac{15cm}{2})^2$

$h^2 = 343{,}75\ cm^2 - 56{,}25\ cm^2$

$h^2 = 287{,}5\ cm^2$ /√

$\underline{\underline{h = 17\ cm}}$

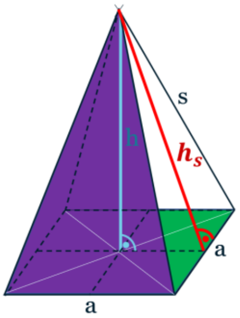


A_O **berechnen:** $A_O = A_G + A_M$ $A_O = 225\ cm^2 + 555\ cm^2 = \underline{\underline{780\ cm^2}}$

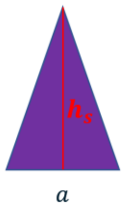
$A_G = a \cdot a$

$A_G = 15\ cm \cdot 15\ cm$

$A_G = 225\ cm^2$



$A_M = 4 \cdot A_D$



$A_D = \frac{a \cdot h_s}{2}$

$A_D = \frac{15\ cm \cdot 18{,}5\ cm}{2}$

$A_D = 138{,}75\ cm^2$

$A_M = 4 \cdot 138{,}75\ cm^2$

$A_M = 555\ cm^2$

OBERFLÄCHENINHALT EINER PYRAMIDE

EINSTIEG

Der Louvre in Paris war bis zur französischen Revolution königliche Residenz und ist heute ein weltberühmtes Kunstmuseum.
Als Haupteingang dient seit einigen Jahren eine 21,6 m hohe gläserne Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren Seite 35,4 m lang ist. Die Außenfläche wird regelmäßig von Fensterputzern gereinigt.

» Wie groß ist diese Fläche?

AUFGABE

1.

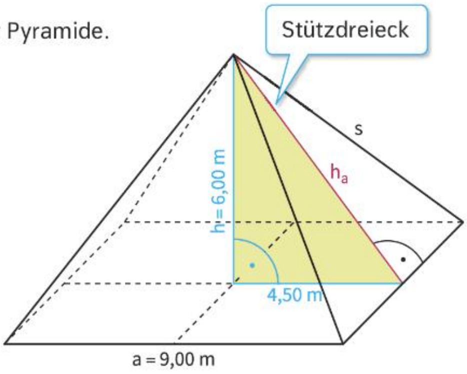
Der Turm der Kirche links hat ein pyramidenförmiges Dach mit quadratischer Grundfläche. Die Länge der Grundkante des Daches beträgt 9 m, die Höhe des Daches 6 m.

a) Das Turmdach soll neu mit Biberschwanz-Ziegeln gedeckt werden. Für 1 m² Dachfläche werden 36 Ziegel benötigt.
Wie viele Dachziegel müssen geliefert werden?

b) Die schrägen Kanten sollen mit First-Ziegeln gedeckt werden. Für eine 1 m lange Kante benötigt man 3 First-Ziegel. Wie viele First-Ziegel müssen bestellt werden?

Lösung

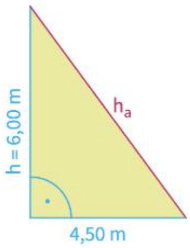
a) (1) *Berechnen der Dachfläche*
Die Dachfläche ist die Mantelfläche einer Pyramide. Sie besteht aus vier zueinander kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit der Basis $a = 9{,}00\,\text{m}$ und der Höhe h_a. Die Höhe h_a können wir mit dem Satz des Pythagoras berechnen. Es gilt:



$h_a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h_a^2 = (6{,}00\,\text{m})^2 + (4{,}50\,\text{m})^2 = 56{,}25\,\text{m}^2$

$h_a = \sqrt{56{,}25\,\text{m}^2} = \underline{\underline{7{,}5\,\text{m}}}$



Für die Größe der Mantelfläche A_M gilt:

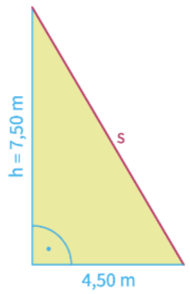
$A_M = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$

$A_M = 4 \cdot \frac{9{,}00\,\text{m} \cdot 7{,}5\,\text{m}}{2} = \underline{\underline{135\,\text{m}^2}}$

(2) *Berechnen der Anzahl der Dachziegel*
$135 \cdot 36 = 4\,860$

Ergebnis: Für das Decken des Daches müssen 4 860 Dachziegel bestellt werden. Der Mehrbedarf für Verschnitt ist dabei nicht berücksichtigt.

Die von der Spitze ausgehenden Kanten heißen Seitenkanten.



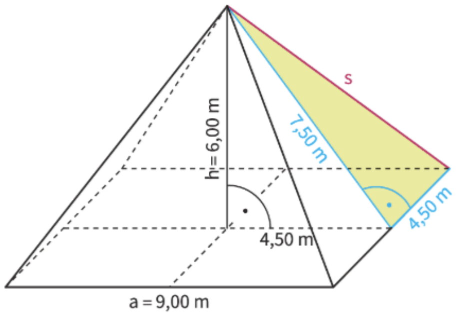
b) (1) *Berechnen der Seitenkanten*

Das Dach hat vier schräge Kanten mit jeweils der Länge s. Sie ist die Länge der Hypotenuse in dem grün gefärbten Dreieck.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$s^2 = (4{,}50\,m)^2 + (7{,}50\,m)^2$
$s^2 = 20{,}25\,m^2 + 56{,}25\,m^2$
$s^2 = 76{,}50\,m^2$
$s = \sqrt{76{,}50\,m^2}$
$\underline{\underline{s \approx 8{,}75\,m}}$

Gesamtlänge der schrägen Kanten:
$4 \cdot s \approx 4 \cdot 8{,}75\,m = 35\,m$



(2) *Berechnen der Anzahl der First-Ziegel*
$35 \cdot 3 = 105$

Ergebnis: Es werden mindestens 105 First-Ziegel benötigt.
Der Verschnitt ist dabei nicht berücksichtigt.

INFORMATION

Die Mantelfläche besteht aus den Seitenflächen.

Statt Oberflächeninhalt sagt man oft auch kurz: Oberfläche.

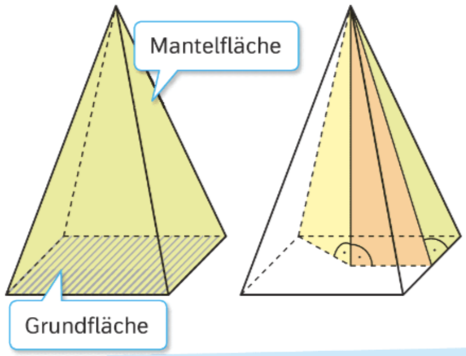
Oberflächeninhalt einer Pyramide

Für den **Oberflächeninhalt A_O einer Pyramide** mit der Grundfläche A_G und der Mantelfläche A_M gilt:

$\mathbf{A_O = A_G + A_M}$

Strategie zum Berechnen von Längen bei Pyramiden

Zur Berechnung von Längen bei Pyramiden muss man geeignete rechtwinklige Dreiecke suchen.



FESTIGEN UND WEITERARBEITEN

2. a) Bei einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche (*quadratische* Pyramide) ist die Grundkante $a = 15\,cm$ und die Seitenkante $s = 20\,cm$ lang.
Berechne die Höhe h_a einer Seitenfläche, die Körperhöhe h und den Oberflächeninhalt A_O der Pyramide.

b) Bei einer quadratischen Pyramide ist die Grundkante 40 m lang, die Körperhöhe beträgt 30 m.
Berechne die Höhe h_a einer Seitenfläche sowie die Länge s der Seitenkanten.

c) Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit der Grundkantenlänge a und der Seitenkantenlänge s.
(1) Gib die Höhe h_a einer Seitenfläche in Abhängigkeit von a und s an.
(2) Zeige, dass für die Körperhöhe h gilt:
$h = \sqrt{s^2 - \frac{1}{2}a^2}$